UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 (Mathematik)
Prof. Dr. Mark Groves
MSc Jens Horn

Mathematik für Informatiker 1, WS 2017/18
Übungsblatt 8

1. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+3}{n^3+4} = 0$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[8]{n^2+1} - \sqrt[8]{n^2} = 0$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[8]{n^2+1} - \sqrt[4]{n+1} = 0$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$

[Hinweis: $\dfrac{2}{n}, \dfrac{3}{n}, \ldots \dfrac{n-1}{n} \leq 1$.]

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

[Hinweis: Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt $\dfrac{n}{(1+\varepsilon)^n} \to 0$ für $n \to \infty$, und insbesondere gibt es $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $\dfrac{n}{(1+\varepsilon)^n} < 1$ für alle $n > N$.]

(g) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ für $a > 0$

[Hinweis: Es gibt $N \in \mathbb{N}$ mit $\dfrac{1}{n} < a < n$ für alle $n > N$.]

(h) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = a$ für $a > b > 0$

[Hinweis: $\sqrt[n]{a^n+b^n} = a\sqrt[n]{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}$ und $1 < 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n < 2$.]

2. (a) X sei eine nichtleere, nach oben beschränkte Menge reeller Zahlen. Beweisen Sie dass es eine Folge $\{x_n\}$ von Zahlen in X gibt, die gegen $\sup X$ konvergiert. (Die Folge $\{x_n\}$ heißt *maximierende Folge* für X.)

[Hinweis: Benutzen Sie das letzte Lemma im Abschnitt 2.6 mit $\varepsilon = \frac{1}{n}$.]

Formulieren Sie ein entsprechendes Ergebnis für minimierende Folgen.

(b) Es sei r beliebige reelle Zahl. Beweisen Sie: Es gibt eine Folge $\{q_n\}$ rationaler Zahlen, die gegen r konvergiert.

[Hinweis: Benutzen Sie die letzte Bemerkung im Abschnitt 2.7 mit $\varepsilon = \frac{1}{n}$.]

3. Die Folge $\{x_n\}$ sei durch das Rekursionsschema

$$x_1 = 2, \qquad x_{n+1} = 1 + \frac{6}{x_n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

definiert.

Zeigen Sie:

$$\text{(i) } x_n \in [2, 4] \;\Rightarrow\; x_{n+1} \in [2, 4], \qquad \text{(ii) } x_{n+2} = 7 - \frac{36}{x_n + 6},$$

$$\text{(iii) } x_{n+2} \geq x_n \;\Rightarrow\; x_{n+3} \leq x_{n+1}, \qquad \text{(iv) } x_{n+2} \leq x_n \;\Rightarrow\; x_{n+3} \geq x_{n+1}$$

für $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Zeigen Sie, dass die Folgen x_1, x_3, x_5, $\ldots$ und x_2, x_4, x_6, $\ldots$ konvergieren und bestimmen Sie ihre Grenzwerte. Folgern Sie, dass $\{x_n\}$ konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert.