UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 (Mathematik)
Prof. Dr. Mark Groves
MSc Jens Horn

Mathematik für Informatiker 1, WS 2018/19
Übungsblatt 8

---

1. Zeigen Sie mit Hilfe des Fundamentalsatzes der elementaren Zahlentheorie, dass $\sqrt{n}$ irrational für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \neq m^2$ für irgendein $m \in \mathbb{N}$ ist.

2. a) Zeigen Sie, dass die Summe einer irrationalen und einer rationalen Zahl irrational ist.

b) Zeigen Sie, dass das Produkt einer irrationalen und einer von Null verschiedenen rationalen Zahl irrational ist.

c) Widerlegen Sie die Aussage, dass die Summe und das Produkt zweier irrationaler Zahlen rational ist.

d) Widerlegen Sie die Aussage, dass die Summe und das Produkt zweier irrationaler Zahlen irrational ist.

3. (a) X sei eine nichtleere, nach oben beschränkte Menge reeller Zahlen. Beweisen Sie dass es eine Folge $\{x_n\}$ von Zahlen in X gibt, die gegen $\sup X$ konvergiert. (Die Folge $\{x_n\}$ heißt *maximierende Folge* für X.)

[Hinweis: Benutzen Sie das vorletzte Lemma im Abschnitt 3.3 mit $\varepsilon = \frac{1}{n}$.]

Formulieren Sie ein entsprechendes Ergebnis für minimierende Folgen.

(b) Es sei r beliebige reelle Zahl. Beweisen Sie: Es gibt eine Folge $\{q_n\}$ rationaler Zahlen, die gegen r konvergiert.

[Hinweis: Benutzen Sie die letzte Bemerkung im Abschnitt 3.4 mit $\varepsilon = \frac{1}{n}$.]

4. Beweisen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} (\cos n!\pi x)^{2k} = \begin{cases} 1, \text{ falls } x \text{ rational ist,} \\ \\ 0, \text{ falls } x \text{ irrational ist.} \end{cases}$$

[Hinweis: Ist x rational, so ist $n!\pi x$ ein ganzzahliges Vielfaches von π für große Werte von n. Ist x dgagegen irrational, so ist $n!\pi x$ niemals ein ganzzahliges Vielfaches von π.]