UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 (Mathematik)
Prof. Dr. Mark Groves
Benedikt Hewer

Analysis 1, SS 2016
Übungsblatt 1

---

1. Betrachten Sie die Teilmengen

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y) \in P : |x| \leq 2,\ |y| \leq 2\}, \\ B &= \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}, \\ C &= \{(x,y) : y > 1\} \end{aligned}$$

der Koordinatenebene P.

Skizzieren Sie die Mengen $(A \cap C) \cup (B \cap (P \setminus C))$ und $(C \setminus A) \cup (A \setminus C)$.

[Hinweis: Skizzieren Sie erst $A \cap C$ und $P \setminus C$, dann $B \cap (P \setminus C)$ und schließlich $(A \cap C) \cup (B \cap (P \setminus C))$.]

2. Es seien L, M und N beliebige Mengen. Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) $(L \backslash M) \backslash N = L \backslash (M \cup N)$,

(ii) $L \backslash (M \cap N) = (L \backslash M) \cap (L \backslash N)$,

(iii) $L \backslash (M \cup N) = (L \backslash M) \cup (L \backslash N)$.

3. A, B, X und Y seien Teilmengen einer Universalmenge U.

(a) Beweisen Sie *aus den Axiomen der Mengenoperationen*, dass $(A \cup B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) = U$ und $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cap \overline{B}) = \emptyset$.

(b) Es sei $X \cup Y = U$ und $X \cap Y = \emptyset$. Beweisen Sie *aus den Axiomen der Mengenoperationen*, dass $Y = \overline{X}$.

(c) Folgern Sie das de Morgansche Gesetz

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

und das Involutionsgesetz

$$\overline{\overline{A}} = A.$$

4. Es seien X, Y beliebige nichtleere Mengen und $f : X \to Y$ eine Funktion.

(a) Beweisen Sie, dass
$$A \subseteq f^{-1}[f[A]]$$
für alle Teilmengen A von X.

(b) Beweisen Sie, dass
$$A = f^{-1}[f[A]] \tag{$\star$}$$
für alle Teilmengen A von X genau dann, wenn f injektiv ist.

(c) Geben Sie eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und eine Teilmenge A von $\mathbb{R}$ mit der Eigenschaft an, dass ($\star$) nicht erfüllt ist.

5. Gegeben seien die Mengen

$$\begin{array}{llll} S_1 = \{\{\emptyset\}, \{A\}, A\}, & S_2 = A, & S_3 = \{A\}, & S_4 = \{A, \{A\}\}, \\ S_5 = \emptyset, & S_6 = \{\emptyset\}, & S_7 = \{\{\emptyset\}\}, & S_8 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}. \end{array}$$

(i) Welche der Mengen $S_1, ..., S_8$ ist Element von S_1?

(ii) Welche der Mengen $S_1, ..., S_8$ ist Teilmenge von S_1?

(iii) Welche der Mengen $S_1, ..., S_8$ ist Element von S_8?

(iv) Welche der Mengen $S_1, ..., S_8$ ist Teilmenge von S_8?

6. Welche der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind injektiv? Welche sind surjektiv? (Begründen Sie Ihre Antworten.) Berechenen Sie in jedem Fall $f[-1, 1]$ und $f^{-1}[-1, 1]$.

a) $f_1(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{für } x \geq 0 \\ x + 1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$

b) $f_2(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{für } x \geq 0 \\ -x + 1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$

c) $f_3(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \geq 0 \\ x^3 & \text{für } x < 0 \end{cases}$