UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 (Mathematik)
Prof. Dr. Mark Groves
MSc Jens Horn

Mathematik für Informatiker 1, WS 2018/19
Übungsblatt 12

---

1. Es seien a, b positive Zahlen und die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei durch die Formel

$$f(x) = \begin{cases} |x|^a \sin\left(\dfrac{1}{|x|^b}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

definiert.

(a) Beweisen Sie, dass f an allen von 0 verschiedenen Stellen differenzierbar ist, und berechnen Sie die Ableitung.

(b) Für welche Werte von a und b ist f auch an der Stelle 0 differenzierbar? Wann ist in diesem Fall die Ableitungsfunktion $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(i) stetig,

(ii) nicht stetig aber beschränkt,

(iii) nicht beschränkt?

2. (a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|x-a|},$$

wobei a eine positive Konstante ist, und zeigen Sie, dass der maximale Wert von f gleich

$$\frac{2+a}{1+a}$$

ist.

(b) p sei ein Polynom n-ten Grades mit kritischen Punkten -1, 1, 2, 3 und 4. Die entsprechenden Werte von p seien 6, 1, 2, 4 und 3 und die Koeffizient bei x^n sei 1. Skizzieren Sie den Graphen von p. Unterscheiden Sie dabei zwischen den Fällen n gerade und n ungerade.

3. Diese Aufgabe ist mit Hilfe folgendes Ergebnis zu lösen, das in der Vorlesung bewiesen wird.

> Es sei $f : I \to J$ eine stetige, bijektive Funktion mit stetiger Umkehrfunktion $f^{-1} : J \to I$, wobei I, J offene Intervalle sind. Ferner sei f differenzierbar im Punkt a.
>
> f^{-1} ist differenzierbar im Punkt $b = f(a)$ genau dann, wenn $f'(a) \neq 0$ ist. In diesem Fall gilt
> $$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

(a) Es sei n eine natürliche Zahl. Definiere

$$g_n(x) = x^{\frac{1}{n}}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

falls n ungerade ist, und

$$g_n(x) = x^{\frac{1}{n}}, \qquad x \in [0, \infty),$$

falls n gerade ist.

(i) Zeigen Sie: g_n ist differenzierbar für $x \neq 0$ und $g_n'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$.

(ii) Folgern Sie, dass
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^q = q x^{q-1}$$
für alle *positiven* rationalen Zahlen q ist.

(iii) Folgern Sie, dass
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^q = q x^{q-1}$$
für alle *negativen* rationalen Zahlen q ist.

(b) Die Umkehrfunktionen von

$$\sin(\cdot) : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1], \qquad \cos(\cdot) : [0, \pi] \to [-1, 1],$$
$$\tan(\cdot) : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$$

werden als

$$\arcsin(\cdot) : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2], \qquad \arccos(\cdot) : [-1, 1] \to [0, \pi],$$
$$\arctan(\cdot) : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$$

bezeichnet. Skizzieren Sie die Graphen dieser Funktionen und beweisen Sie, dass

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad x \in (-1, 1),$$

und

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$