



Mathematik für Informatiker 1, WS 2018/19
Übungsblatt 10

1. (a) Finden Sie alle konvergenten Teilfolgen der Folge

$$1, -1, -1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots$$

(b) Finden Sie alle konvergenten Teilfolgen der Folge

$$1, 2, 2, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, \dots$$

(c) Für welche reellen Zahlen α gibt es eine Teilfolge der Folge

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \dots,$$

die gegen α konvergiert?

2. (a) Leiten Sie die Formel

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}$$

her. [Hinweis: Es gilt

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.]

(b) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

konvergiert und bestimmen Sie ihre Summe.

3. Welche der folgenden Reihen sind konvergent?

(a) $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{r^3 + 4r + 3}{\sqrt{r^{10} + r^7}}$

(b) $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{r^3 + 4r + 3}{\sqrt{r^8 + 3r^7}}$

(c) $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + 1/r)^r}$

(d) $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{r^4 + 1}{2^r}$

[Hinweis: $r^4 + 1 \leq (\frac{3}{2})^r$ für großes r]

(e) $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{r + 2^r}{r2^r}$

[Hinweis: $r + 2^r \geq 2^r$]

(f) $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{r!}{r^r}$

[Hinweis: Quotientenkriterium]

(g) $\sum_{r=1}^{\infty} \sin \frac{1}{r}$

[Hinweis: $\sin x \geq \frac{1}{2}x$ für kleines x]

(h) $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \sin \frac{1}{r}$

[Hinweis: $\sin x \leq x$]

(i) $\sum_{r=2}^{\infty} \frac{1}{r \log r}$

[Hinweis: $\frac{d}{dx}(\log(\log x)) = \frac{1}{x \log x}$]

(j) $\sum_{r=2}^{\infty} \frac{1}{r^2 \log r}$

[Hinweis: $\log r > 1$ für großes r]