UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 (Mathematik)
Prof. Dr. Mark Groves
MSc Jens Horn

Mathematik für Informatiker 1, WS 2017/18
Übungsblatt 4

---

1. Beweisen Sie die folgenden Aussagen durch vollständige Induktion:

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \log\left(1+\frac{1}{i}\right) = \log(1+n)$ für jede natürliche Zahl n;

(b) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(2i-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$ für jede natürliche Zahl n;

(c) $n^2 \leq 2^n \leq n!$ für jede natürliche Zahl $n \geq 4$;

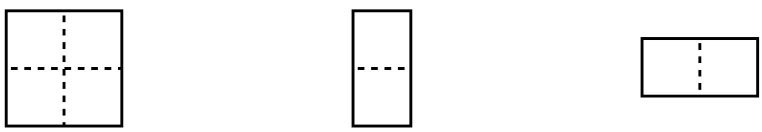
(d) $6|(2^n + 3^n - 5^n)$ für jede natürliche Zahl n.

2. (a) Es sei $\mathcal{P}(n)$, $n \in \mathbb{N}$ eine Aussageform mit den folgenden Eigenschaften:

- Es existiert $m \in \mathbb{N}$, so dass $\mathcal{P}(1)$, ..., $\mathcal{P}(m)$ wahr sind.
- Es sei $k > m$. Ist $\mathcal{P}(j)$ für alle $j < k$ wahr, so ist $P(k)$ wahr.

Folgern Sie aus dem Wohlordnungsaxiom der natürlichen Zahlen, dass $P(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr ist. (Dies ist das *Prinzip der starken vollständigen Induktion*).

(b) Im Spiel 'Mini-Tetris' geht es darum, ein $2 \times n$ Rechteck mit den folgenden Bausteinen lückenlos und ohne Überlappungen zu belegen:



Es sei T_n die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten, mit diesen Bausteinen ein $2 \times n$ Rechteck so zu belegen.

Bestimmen Sie T_1 und T_2, finden Sie eine Formel für T_n für $n \geq 3$ als Funktion von T_{n-1} und T_{n-2}, und beweisen Sie durch starke Induktion, dass

$$T_n = \frac{1}{3}[2^{n+1} + (-1)^n]$$

ist.

3. Berechnen Sie $(1552303, 233927)$ und bestimmen Sie ganze Zahlen m und n derart, dass

$$(1552303, 233927) = 1552303m + 233927n.$$

4. Es seien a und b natürliche Zahlen und $d = (a, b)$.

(a) Zeigen Sie, das d das kleinste Element der Menge

$$\{ma + nb : m, n \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{N}$$

ist. [Hinweis: Sie brauchen nicht das Wohlordnungsaxiom der natürlichen Zahlen.]

(b) Folgern Sie: Gibt es ganze Zahlen m und n mit $ma + nb = 1$, so ist $(a, b) = 1$.