**UNIVERSITÄT DES SAARLANDES**
**Fachrichtung 6.1 (Mathematik)**
**Prof. Dr. Mark Groves**
**MSc Jens Horn**

**Mathematik für Informatiker 1, WS 2018/19**
**Übungsblatt 9**

---

**1.** Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+3}{n^3+4} = 0$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[8]{n^2+1} - \sqrt[8]{n^2} = 0$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[8]{n^2+1} - \sqrt[4]{n+1} = 0$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$

[Hinweis: $\dfrac{2}{n}$, $\dfrac{3}{n}$, $\ldots \dfrac{n-1}{n} \leq 1$.]

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

[Hinweis: Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt $\dfrac{n}{(1+\varepsilon)^n} \to 0$ für $n \to \infty$, und insbesondere gibt es $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $\dfrac{n}{(1+\varepsilon)^n} < 1$ für alle $n > N$.]

(g) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ für $a > 0$

[Hinweis: Es gibt $N \in \mathbb{N}$ mit $\dfrac{1}{n} < a < n$ für alle $n > N$.]

(h) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = a$ für $a > b > 0$

[Hinweis: $\sqrt[n]{a^n + b^n} = a\sqrt[n]{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n}$ und $1 < 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n < 2$.]

**2.** Die Folge $\{x_n\}$ sei durch das Rekursionsschema

$$x_1 = 2, \qquad x_{n+1} = 1 + \frac{6}{x_n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

definiert. Zeigen Sie:

$$\text{(i) } x_n \in [2,4] \ \Rightarrow\ x_{n+1} \in [2,4], \qquad \text{(ii) } x_{n+2} = 7 - \frac{36}{x_n + 6},$$

$$\text{(iii) } x_{n+2} \geq x_n \ \Rightarrow\ x_{n+3} \leq x_{n+1}, \qquad \text{(iv) } x_{n+2} \leq x_n \ \Rightarrow\ x_{n+3} \geq x_{n+1}$$

für $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Zeigen Sie, dass die Folgen $x_1$, $x_3$, $x_5$, ... und $x_2$, $x_4$, $x_6$, ... konvergieren und bestimmen Sie ihre Grenzwerte. Folgern Sie, dass $\{x_n\}$ konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

**3.** Betrachten Sie die Folge $\{a_n\}$, wobei $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \frac{n+1}{n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

(b) Benutzen Sie die Bernoullische Ungleichung

$$(1+x)^k \geq 1 + kx, \qquad x \geq -1,\ k \in \mathbb{N},$$

um die Abschätzung

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1, \qquad n \in \mathbb{N}$$

zu beweisen.

(c) Benutzen Sie die Binomialentwicklung

$$(1+x)^n = \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} x^j, \qquad |x| < 1,\ n \in \mathbb{N},$$

um die Abschätzung

$$a_n \leq \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

zu beweisen.

[Hinweis: Es gilt

$$\frac{n!}{(n-j)!} \frac{1}{n^j} = \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-j+1}{n}$$

für $n \in \mathbb{N}$ und $j = 0, 1, \ldots, n$.]

(d) Zeigen Sie, dass

$$a_n \leq 3, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

[Hinweis: Es gilt $2^{j-1} \leq j!$ für alle $j \in \mathbb{N}$.]

(e) Folgern Sie, dass $\{a_n\}$ gegen eine reelle Zahl im Intervall $(2, 3)$ konvergiert. (Diese Zahl heißt die *Eulersche Zahl* $\mathrm{e}$.)