UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 (Mathematik)
Prof. Dr. Mark Groves
MSc Jens Horn

Mathematik für Informatiker 1, WS 2018/19
Übungsblatt 3

---

1. Für die Elemente von $\mathbb{Z}_3$ ergeben sich bezüglich der Addition $\oplus$ und der Multiplikation $\odot$ der Restklassenarithmetik die folgenden Verknüpfungstabellen:

$\oplus$	$[0]$	$[1]$	$[2]$
$[0]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$
$[1]$	$[1]$	$[2]$	$[0]$
$[2]$	$[2]$	$[0]$	$[1]$

$\odot$	$[0]$	$[1]$	$[2]$
$[0]$	$[0]$	$[0]$	$[0]$
$[1]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$
$[2]$	$[0]$	$[2]$	$[1]$

(a) Besimmen Sie diese Tabellen für die Elemente von $\mathbb{Z}_5$ und $\mathbb{Z}_7$.

(b) Besimmen Sie diese Tabellen für die Elemente von $\mathbb{Z}_4$ und zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \odot)$ kein Körper ist.

2. Zeigen Sie, dass $\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ ein Teilkörper von $(\mathbb{R}, +, .)$ ist.

3. Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}$ mit der üblichen Addition und Multiplikation kein geordneter Körper ist. [Hinweis: Zeigen Sie, dass die Annahmen $0 < \mathrm{i}$ und $\mathrm{i} < 0$ jeweils zu einem Widerspruch führen.]

4. Definieren Sie die Verknüpfungen 'Subtraktion' und 'Division' auf einem Körper $(K, +, .)$. Es seien a, b, c, d Elemente in K mit b, $d \neq 0$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a.d - b.c}{b.d}, \qquad \frac{a}{b} \Big/ \frac{d}{c} = \frac{a.c}{b.d},$$

indem Sie *nur die Axiome der Arithmetik und Ihre Definitionen* anwenden.

5. Es seien X eine nichtleere Menge und $\cdot$ eine assoziative Verknüpfung auf X mit den folgenden Eigenschaften.

(i) Das Element $e \in X$ erfüllt $e \cdot x = x$ für alle $x \in X$.

(ii) Zu jedem $x \in X$ existiert ein Element x^{-1} mit $x^{-1} \cdot x = e$.

Zeigen Sie, dass $x \cdot e = x$ und $x \cdot x^{-1} = e$ für alle $x \in X$.