UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 (Mathematik)
Prof. Dr. Mark Groves
MSc Jens Horn

Mathematik für Informatiker 1, WS 2018/19
Übungsblatt 11

---

1. (a) Wie viele n-stellige natürliche Zahlen ohne die Ziffer 9 gibt es?

(b) Zeigen Sie, dass die Summe der Reziproken aller n-stelligen näturlichen Zahlen ohne die Ziffer 9 kleiner gleich $8(\frac{9}{10})^{n-1}$ ist.

(c) Zeigen Sie: Die Reihe, die aus der harmonischen Reihe durch die Entfernung aller Summanden mit der Ziffer 9 in ihrem Nenner entsteht, ist konvergent.

2. Geben Sie rigorose Formulierungen der folgenden Aussagen an.

(i) $f(x) \to \infty$ für $x \to \infty$

(ii) $f(x) \to -\infty$ für $x \to \infty$

(iii) $f(x) \to \infty$ für $x \to -\infty$

(iv) $f(x) \to -\infty$ für $x \to -\infty$

(v) $f(x) \to \infty$ für $x \to a$

(vi) $f(x) \to -\infty$ für $x \to a$

3. (a) Es sei $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$. Beweisen Sie: Für alle Folgen $\{x_n\}$ mit $x_n \neq a$, die gegen a konvergieren, konvergiert $\{f(x_n)\}$ gegen ℓ.

(b) Beweisen Sie die Konverse zu (a) durch Widerspruch: $\{f(x_n)\}$ konvergiere gegen ℓ für alle Folgen $\{x_n\}$ mit $x_n \neq a$, die gegen a konvergieren. Setzen Sie $\delta = 1/n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ in die rigorose Formulierung der Aussage '$\lim_{x\to a} f(x) \neq \ell$' und finden Sie eine Folge $\{x_n\}$ mit $x_n \neq a$ und $x_n \to a$ aber $f(x_n) \not\to \ell$ für $n \to \infty$.

(c) Die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien stetig. Beweisen Sie, dass $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ebenfalls stetig ist.

(d) Die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien stetig und es gelte $f(q) = g(q)$ für alle rationalen Zahlen q. Beweisen Sie, dass $f(x) = g(x)$ für alle reellen Zahlen x ist.

4. Diese Aufgabe ist mit Hilfe des Zwischenwertsatzes zu lösen.

(i) Es sei $\alpha < \beta$. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$\frac{x^2+1}{x-\alpha} + \frac{x^6+1}{x-\beta} = 0$$

mindestens eine Lösung $x_0 \in (\alpha, \beta)$ hat.

(ii) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$2^x = 4x$$

außer bei $x = 4$ mindestens eine weitere Lösung besitzt.