



Mathematik für Informatiker 1, WS 2017/18
Übungsblatt 1

1. Betrachten Sie die Teilmengen

$$\begin{aligned}A &= \{(x, y) : (x - 3)^2 + y^2 \leq 1\}, \\B &= \{(x, y) : (x + 2)^2 + y^2 \leq 1\}, \\C &= \{(x, y) : |y - 1| \leq 1\}, \\D &= \{(x, y) : |x| \leq 2, |y - 2| \leq 2\}, \\E &= \{(x, y) : -4 < x < 3\}\end{aligned}$$

der Koordinatenebene P .

Skizzieren Sie die Mengen A, B, C, D, E sowie $A \cup B \cup C \cup D$, $(A \cup B \cup C \cup D) \cap E$, $B \cap C$, $B \cap D$, $(B \cap C) \setminus (B \cap D)$.

2. A, B, X und Y seien Teilmengen einer Universalmenge U .

- Beweisen Sie *aus den Axiomen der Mengenoperationen*, dass $X \cup U = U$ und $X \cap \emptyset = \emptyset$.
- Beweisen Sie *aus den Axiomen der Mengenoperationen*, dass $(A \cup B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) = U$ und $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cap \overline{B}) = \emptyset$.
- Es sei $X \cup Y = U$ und $X \cap Y = \emptyset$. Beweisen Sie *aus den Axiomen der Mengenoperationen*, dass $Y = \overline{X}$.
- Folgern Sie das de Morgansche Gesetz

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

und das Involutionsgesetz

$$\overline{\overline{A}} = A.$$

3. Es seien L, M und N beliebige Mengen. Beweisen oder widerlegen Sie:

- $(L \setminus M) \setminus N = L \setminus (M \cup N)$,
- $L \setminus (M \cap N) = (L \setminus M) \cap (L \setminus N)$,
- $L \setminus (M \cup N) = (L \setminus M) \cup (L \setminus N)$.

4. Welche der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sind injektiv? Welche sind surjektiv? (Begründen Sie Ihre Antworten.) Berechnen Sie in jedem Fall $f[-1, 1]$ und $f^{-1}[-1, 1]$.

a) $f_1(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{für } x \geq 0 \\ x + 1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$

b) $f_2(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{für } x \geq 0 \\ -x + 1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$

c) $f_3(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \geq 0 \\ x^3 & \text{für } x < 0 \end{cases}$

5. Gegeben seien die Mengen

$$\begin{array}{llll} S_1 = \{\{\emptyset\}, \{A\}, A\}, & S_2 = A, & S_3 = \{A\}, & S_4 = \{A, \{A\}\}, \\ S_5 = \emptyset, & S_6 = \{\emptyset\}, & S_7 = \{\{\emptyset\}\}, & S_8 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}. \end{array}$$

- (i) Welche der Mengen S_1, \dots, S_8 ist Element von S_1 ?
- (ii) Welche der Mengen S_1, \dots, S_8 ist Teilmenge von S_1 ?
- (iii) Welche der Mengen S_1, \dots, S_8 ist Element von S_8 ?
- (iv) Welche der Mengen S_1, \dots, S_8 ist Teilmenge von S_8 ?