



1. Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale.

(i) $\int \frac{(1+x)^2}{\sqrt{x}} dx$ (ii) $\int x\sqrt{x+9} dx$

(iii) $\int \frac{x}{(x-1)(x-2)} dx$
[Hinweis: Partialbruchzerlegung.]

(iv) $\int \frac{1}{x(x-1)(x-2)} dx$
[Hinweis: Partialbruchzerlegung.]

(v) $\int \frac{8-x}{(x-2)^2(x+1)} dx$
[Hinweis: Partialbruchzerlegung.]

(vi) $\int \frac{1}{x^2+8x+25} dx$
[Hinweis: Quadratische Ergänzung. Benutzen Sie die Substitution $x = -4 + 3 \tan \theta$.]

(vii) $\int \sqrt{1+16x^2} dx$
[Hinweis: Benutzen Sie die Substitution $x = \frac{1}{4} \sinh \theta$.]

(viii) $\int \sqrt{1-x^2} dx$
[Hinweis: Benutzen Sie die Substitution $x = \sin \theta$.]

3. Es sei $I_n = \int \cos^n x dx$ für $n = 2, 3, \dots$

(i) Zeigen Sie:

$$nI_n = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)I_{n-2} + c, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(ii) Berechnen Sie $\int_0^{\pi/2} \cos^7 x dx$.

3. Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale.

(i) $\int \sin^2 2x \cos^3 2x \, dx$

(iii) $\int \frac{\sin x}{(1 + \cos x)^2} \, dx$

(ii) $\int \tan^2 x \, dx$

(iv) $\int \frac{e^x}{1 + e^x} \, dx$

(v) $\int \frac{\sin x + 2 \cos x}{\cos x + 2 \sin x} \, dx$

[Hinweis: Es gilt

$$\sin x + 2 \cos x = \frac{3}{5}(-\sin x + 2 \cos x) + \frac{4}{5}(\cos x + 2 \sin x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.]

(vi) $\int \frac{1}{3 + 5 \cos x} \, dx$

[Hinweis: Es gilt

$$\cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Benutzen Sie die Substitution $t = \tan \frac{x}{2}$.]

(vii) $\int \frac{1}{25 - 24 \sin^2 x} \, dx$

[Hinweis: Es gilt

$$\sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Benutzen Sie die Substitution $t = \tan x$.]