UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Mark Groves
MSc Jens Horn

Mathematik für Informatiker 2, SS 2018
Übungsblatt 1

---

1. Benutzen Sie eine mittlere Riemannsche Summe und eine äquidistante Zerlegung von $[0,5]$ mit 50 Teilintervallen, um den Wert des Integrals

$$\int_0^5 \sin x \cos(x - \tfrac{\pi}{5})\,\mathrm{d}x$$

zu approximieren. (Runden Sie ihre Antwort auf die vierte Stelle hinter dem Komma.)

2. a) Es seien $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = c$ gegeben, wobei c eine Konstante ist, und Z eine beliebige Zerlegung von $[a,b]$.

Zeigen Sie, dass die Riemannsche Obersumme $O_f(Z)$ und die Riemannsche Untersumme $U_f(Z)$ beide gleich $c(b-a)$ sind. Folgern Sie, dass f über $[a,b]$ intergierbar mit $\int_a^b f = c(b-a)$ ist.

b) Eine Funktion $s : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt *Treppenfunktion*, falls es eine Zerlegung $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ von $[a,b]$ gibt, so dass s auf jedem Teilintervall (x_{j-1}, x_j), $j = 1, \ldots, n$ konstant ist.

Zeigen Sie, dass jede Treppenfunktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar ist und berechnen Sie ihr Integral.

3. Es seien f, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen. Zeigen Sie:

(i) Falls $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$, so ist $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.

[Hinweis: Welches Vorzeichen haben die Riemannschen Ober- und Untersummen?]

(ii) Aus $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a,b]$ folgt $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

(iii) Es sei $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a,b]$. Dann gilt $\displaystyle m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a)$.

4. a) Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Folgern Sie aus der Ungleichung

$$O_{|f|}(Z) - U_{|f|}(Z) \leq O_f(Z) - U_f(Z),$$

die für jede Zerlegung Z von $[a,b]$ gilt, und dem Riemannschen Integrabilitätskriterium:

Ist f über $[a,b]$ integrierbar, so ist $|f|$ ebenfalls über $[a,b]$ integrierbar.

b) Zeigen Sie: Ist f integrierbar, so gilt $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$

c) Finden Sie eine nichtintegrierbare Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $|f|$ integrierbar ist.

d) Der *Positivteil* bzw. *Negativteil* einer Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sind die Funktionen $f_\pm : [a,b] \to \mathbb{R}$, die durch die Formeln

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0, \\ 0, & f(x) < 0, \end{cases} \qquad f_-(x) = \begin{cases} 0, & f(x) > 0, \\ -f(x), & f(x) \leq 0 \end{cases}$$

definiert sind.

Zeigen Sie: Ist f über $[a,b]$ integrierbar, so sind auch $f_\pm$ über $[a,b]$ integrierbar.