UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 (Mathematik)
Prof. Dr. Mark Groves
MSc Jens Horn

Mathematik für Informatiker 2, SS 2018
Übungsblatt 7

---

1. Es seien

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad M_5 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad M_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die definierten Produkte M_iM_j für $i, j = 1, \ldots, 6$.

2. (a) Seien $\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_2$ die Standardbasen für $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^2$ sowie

$$\mathcal{B}_3' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \mathcal{B}_2' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

weitere Basen für $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^2$ und $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineare Abbildungen mit

$$M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_3}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}, \qquad M_{\mathcal{B}_3'}^{\mathcal{B}_2'}(S) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $M_{\mathcal{B}_2'}^{\mathcal{B}_3'}(T)$ und $M_{\mathcal{B}_3}^{\mathcal{B}_2}(S)$.

[Hinweis: $B_{\mathcal{B}_3}^{\mathcal{B}_3'}$ und $B_{\mathcal{B}_2'}^{\mathcal{B}_2}$ werden in dem Beispiel auf Seiten 84–85 des Vorlesungsskripts berechnet.]

(b) Seien $\mathcal{B} = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ die Standardbasis für $\mathbb{R}^{2\times 2}$,

$$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

eine weitere Basis für $\mathbb{R}^{2\times 2}$ und $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ die lineare Abbildung mit

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(T)$.

3. Es seien $\mathcal{A} = \{x^2, x^2+1, x-1\}$ und $\mathcal{B} = \{x, 1-x, x^2\}$ Basen für $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

(a) Bestimmen Sie $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$ und $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}$.

(b) Finden Sie eine Basis $\mathcal{C}$ für $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ derart, dass $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}$.

4. Es seien K ein Körper, $A \in K^{m\times n}$ und $B \in K^{n\times p}$.

(a) Zeigen Sie, dass $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

[Hinweis: Mit Hilfe der Bemerkung auf Seite 87 des Vorlesungsskripts können Sie Formeln für $\mathbf{c}_j^{AB}$ und $\mathbf{r}_j^{B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}}$ hinschreiben.]

(b) Zeigen Sie, dass

$$\text{Spaltenrang}\, AB \leq \text{Spaltenrang}\, A \qquad \text{Zeilenrang}\, AB \leq \text{Zeilenrang}\, B$$

und folgern Sie, dass

$$\text{Rang}\, AB \leq \min(\text{Rang}\, A, \text{Rang}\, B).$$

[Hinweis: Lesen Sie die Bemerkung auf Seite 87 des Vorlesungsskripts.]