UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 (Mathematik)
Prof. Dr. Mark Groves
MSc Jens Horn

Mathematik für Informatiker 2, SS 2018
Übungsblatt 6

---

1. Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

(i) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x + 2y$

(ii) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x + y^2$

(iii) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto xy$

(iv) $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \overline{z}$

(v) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \end{pmatrix}$

(vi) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-y \\ x+2y \end{pmatrix}$

(vii) $\mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad p(x) \mapsto p(1)$

(viii) $\mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_{n+2}(\mathbb{R}), \quad p(x) \mapsto x^2 p(x)$

2. (a) Es sei $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die durch die Formel

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ x+2y-z \\ 2x+y+z \end{pmatrix}$$

definierte lineare Abbildung. Finden Sie die Darstellungsmatrix von T bezüglich der üblichen Basis für $\mathbb{R}^3$.

(b) Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $T : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ die durch die Formel

$$(T(p))(x) = p(x+1)$$

definierte lineare Abbildung. Finden Sie die Darstellungsmatrix von T bezüglich der üblichen Basis für $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$.

(c) Es sei $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ die durch die Formel

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2b \\ 3c & 4d \end{pmatrix}$$

definierte lineare Abbildung. Finden Sie die Darstellungsmatrix von T bezüglich der üblichen Basis für $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

3. Die Darstellungsmatrix der linearen Abbildung $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ bezüglich der üblichen Basis für $\mathbb{R}^3$ sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie die Darstellungsmatrix von T bezüglich der Basis

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

für $\mathbb{R}^3$.

[Hinweis: Mit Hilfe der Matrix A können Sie eine Formel für $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ finden.]

4. (a) Es seien U, V, W Vektorräume über einem Körper K und $S : U \to V$, $T : V \to W$ Isomorphismen. Zeigen Sie, dass $S^{-1} : V \to U$ und $T \circ S : U \to W$ ebenfalls Isomorphismen sind.

(b) Es sei M die Menge aller Vektorräume úber einem Körper K. Zeigen Sie, dass die Formel

$$V \sim W \qquad \Leftrightarrow \qquad V \cong W$$

eine Äquivalenzrelation auf M definiert.

(c) Es seien V und W zwei endlichdimensionale, isomorphe Vektorräume über einem Körper K. Zeigen Sie, dass $\dim V = \dim W$.

[Hinweis: Es seien $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Basis für V und $T : V \to W$ ein Isomorphismus. Zeigen Sie, dass $\{T(e_1), \ldots, T(e_n)\}$ eine Basis für W ist.]