UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 (Mathematik)
Prof. Dr. Mark Groves
MSc Jens Horn

Mathematik für Informatiker 2, SS 2018
Übungsblatt 3

---

1. a) Zeigen Sie, dass die uneigentlichen Integrale

$$\int_0^1 \frac{\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t := \lim_{\delta\downarrow 0}\int_0^{1-\delta} \frac{\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$$

und

$$\int_1^\infty \frac{\log t}{t^2}\,\mathrm{d}t := \lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{\log t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

existieren und werten Sie sie aus.

[Hinweis: Verwenden Sie die Substitutionen $t = \sin x$ bzw. $t = \mathrm{e}^u$.]

b) Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1-2\sin t}\,\mathrm{d}t := \lim_{\delta_1\downarrow 0}\int_0^{\frac{\pi}{6}-\delta_1} \frac{1}{1-2\sin t}\,\mathrm{d}t + \lim_{\delta_2\downarrow 0}\int_{\frac{\pi}{6}+\delta_2}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1-2\sin t}\,\mathrm{d}t$$

nicht existert, aber sein Cauchy-Hauptwert

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\left(\int_0^{\frac{\pi}{6}-\delta} \frac{1}{1-2\sin t}\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{6}+\delta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1-2\sin t}\,\mathrm{d}t\right)$$

existiert.

[Hinweis: Es gilt $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{1}{\sqrt{3}}\log\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{6}-\sin t}{1-\cos(\frac{\pi}{6}-t)}\right) = \dfrac{1}{1-2\sin t}$ für $t \neq \frac{\pi}{6}$.]

2. Die *Gamma-Funktion* $\Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist durch die Formel

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$$

definiert.

a) Beweisen Sie: $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ für $x > 0$.

b) Berechnen Sie $\Gamma(n)$ für $n \in \mathbb{N}$.

c) Verwenden Sie das Ergebnis $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ und berechnen Sie $\Gamma(\frac{1}{2})$.

[Hinweis: Verwenden Sie die Substitution $t = u^2$.]

3. Veranschaulichen Sie geometrisch die Regel $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z} = \mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$ für alle Vektoren $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$, indem Sie sie als Pfeile darstellen.