UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 (Mathematik)
Prof. Dr. Mark Groves
MSc Jens Horn

Mathematik für Informatiker 2, SS 2018
Übungsblatt 4

---

1. Zeigen Sie, dass

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} \right\}$$

eine lineare unabhängige Teilmenge von $\mathbb{C}^3$ und

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

eine erzeugende Teilmenge von $\mathbb{C}^3$ ist. Verwenden Sie den Algorithmus im Steinitzschen Austauchsatz, um zwei Elemente von S durch die Elemente von T zu auszutauschen.

2. (a) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{C}^2$ ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ bezüglich der Vektoraddition und Skalarmultiplikation

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + 1 \\ x_2 + y_2 + 1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \alpha - 1 \\ \alpha x_2 + \alpha - 1 \end{pmatrix}$$

ist.

Sind die Vektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$ linear unabhängig in diesem Vektorraum?

(b) Es sei X eine beliebige Menge. Zeigen Sie: Die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ ist ein Vektorraum über den trivialen Körper $\{0, 1\}$ bezüglich der Vektoraddition

$$Y_1 + Y_2 := Y_1 \Delta Y_2$$

und Skalarmultiplikation

$$0Y := \emptyset, \qquad 1Y := Y.$$

[Hinweis: Die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ ist die Menge aller Teilmengen von X. Die *symmetrische Differenz* zweier Mengen A und B ist $A \Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.]

3. Es sei V ein Vektorraum und v_1, v_2, $\ldots$, $v_n \in V$. Zeigen Sie:

(a) Gilt $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle = V$, so gilt auch $\langle v_1 - v_2, v_2 - v_3, \ldots, v_{n-1} - v_n, v_n \rangle = V$.

(b) Sind v_1, v_2, $\ldots$, v_n linear unabhängig, so sind auch $v_1 - v_2$, $v_2 - v_3$, $\ldots$, $v_{n-1} - v_n$, v_n linear unabhängig.

4. Es seien X eine nichtleere Menge und $+$ eine assoziative Verknüpfung auf X mit den folgenden Eigenschaften.

(i) Das Element $0 \in X$ erfüllt $0 + x = x$ für alle $x \in X$.

(ii) Zu jedem $x \in X$ existiert ein Element $-x$ mit $-x + x = 0$.

Zeigen Sie, dass $x + 0 = x$ für alle $x \in X$ und $x + (-x) = 0$. Zeigen Sie ferner, dass 0 das einzige Element in X mit der Eigenschaft (i), und $-x$ das einzige Element in X mit der Eigenschaft $-x + x = 0$ ist.

Welche Auswirkungen hat dieses Ergebnis auf die Vektorraumaxiome (V1)–(V4)?