UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 (Mathematik)
Prof. Dr. Mark Groves
MSc Jens Horn

Mathematik für Informatiker 2, SS 2018
Übungsblatt 11

---

1. Welche der Matrizen

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

sind über $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ diagonalisierbar?

2. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Finden Sie eine reelle, invertierbare Matrix P derart, dass $P^{-1}AP$ diagonal ist.

(b) Finden Sie eine reelle Matrix B derart, dass $B^3 = A$ ist.

3. Die *Legendre-Polynome* sind durch die Formeln

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\big((1-x^2)^n\big), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

definiert. Zeigen Sie, dass $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine orthogonale Menge in $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ ist, d.h. $\langle P_n, P_m \rangle = 0$ für $n \neq m$, wobei

$$\langle p_1, p_2 \rangle = \int_{-1}^{1} p_1(x) p_2(x) \, \mathrm{d}x, \qquad p_1, p_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}),$$

ist.

[Hinweis: Leiten Sie die Formel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big((1-x^2)P_n(x)\big) + n(n+1)P_n(x) = 0$$

her und betrachte das Integral

$$\int_0^1 \left(P_m(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big((1-x^2)P_n(x)\big) - P_n(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big((1-x^2)P_m(x)\big) \right) \mathrm{d}x. \ \Big]$$